APORTE PARA LA REVISIÓN DE LA INCLUSIÓN/EXCLUSIÓN DE CONTENIDOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Sergio Oscar Anchorena
Universidad Nacional de Mar del Plata
Prov. de Buenos Aires (Argentina)
pollo@mdp.edu.ar

RESUMEN

Los que enseñamos matemática muchas veces somos propensos (afortunadamente) a incorporar nuevos contenidos que, de acuerdo con el avance de la ciencia o su creciente aplicación por otras disciplinas, justifican su inclusión como contenido curricular. Sin embargo no parecemos tan propensos (lamentablemente) a eliminar contenidos siendo que, si el avance y la aplicabilidad son buenas razones para incluir los nuevos, la obsolescencia y la inaplicabilidad serían buenas razones para excluir algunos de los viejos. En este trabajo se presentan algunos contenidos que deberían ser excluidos sobre la base del avance de la ciencia y de la tecnología, y que, sin embargo, siguen apareciendo recurrentemente entre los contenidos a enseñar en Matemática en los niveles medio y superior del sistema educativo. En este trabajo se discute en particular la inclusión de los contenidos "racionalización de denominadores" y "cofunciones trigonométricas" sobre la base de los criterios mencionados.

INTRODUCCIÓN: ALGUNOS CRITERIOS PARA LA INCLUSIÓN DE CONTENIDOS

Mucho se ha discutido, y se discute, respecto de cuales son los criterios para la inclusión de contenidos curriculares en el sistema educativo en los diferentes niveles, entre estos criterios encuentran relativo consenso, en el caso de contenidos científicos, el de "calidad científica" y el de "calidad instrumental".

El criterio de calidad científica, básicamente, requiere, como en el caso del propio conocimiento científico, que los contenidos a enseñar sean reconocidos como verdaderos por la comunidad científica en cuestión, que dicho conocimiento esté fundamentado mediante los procedimientos propios de la disciplina (fundamentación que será empírica, para las ciencias experimentales, y axiomática deductiva para las ciencias formales) y que estén actualizados, esto es, que refieran a problemas que se presentan el la práctica de la disciplina.

El criterio de calidad instrumental refiere a que el conocimiento a enseñar, favorezca su apropiación por parte del estudiante, de manera tal que el mismo pueda ser referido y transferido a otras situaciones problemáticas, sean estas para transformar el medio en que el estudiante se desenvuelve, o bien, para interpretar y comprender la información que recibe acerca de los acontecimientos actuales o históricos desde una visión integradora y en relación con la disciplina en cuestión (Anchorena, S., 1996).

Si se acuerda con estos criterios se acordará también con que, desde el punto de vista de la calidad científica, la falsedad de un conocimiento, la falta de fundamentación, o bien su obsolescencia, deberían ser motivos para la exclusión de un conocimiento como contenido currricular.

Del mismo modo, desde el punto de vista de la calidad instrumental, la falta de utilidad de un conocimiento, ya sea para resolver problemas reales, ya sea para interpretar y comprender la información y procesos del mundo social, científico o tecnológico, deberían ser motivos suficientes para excluirlo de la enseñanza.

LOS NÚMEROS IRRACIONALES: ALGUNAS CUENTAS DIFÍCILES

No hace falta ser muy ducho en matemáticas para descubrir que hacer la división *1/3,16228* es mucho más difícil que hacer la división *3,16228/10,* sin embargo hace falta un poco más de trabajo para descubrir que ambas divisiones arrojan el mismo resultado. Un grado de dificultad muy parecido tendríamos para dividir *1/0,57735.*

También presenta un grado de dificultad considerable obtener, con "lápiz y papel", la raíz cuadrada muchos de los números reales, y no menos dificultad la de muchos de los naturales, lo mismo que obtener el valor de las funciones trigonométricas, con excepción de las correspondientes a los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90, y sus ángulos suplementarios y complementarios.

Es por eso que resultó un avance, y un recurso casi indispensable para la matemática, o mas exactamente para los matemáticos, físicos, químicos, ingenieros y otros usuarios de la matemática, las tablas de logaritmos, funciones trigonométricas, raíces y potencias, de las cuales, acaso las más conocida por todos nosotros sean las Tablas Hoüel elaboradas en el siglo XIX.

Así, el matemático francés Jules Hoüel (1823-1886), además de sus contribuciones a la geometría no euclidiana y al cálculo diferencial, nos proporcionó una invalorable herramienta para obtener los resultados de estas funciones y operaciones numéricas que presentaban gran dificultad.

Pero estas tablas no nos daban todas las respuestas, así, las tablas en cuestión nos proporcionaban el resultado, por ejemplo, de $(10)^{1/2}$ =3,16228; pero no nos proporcionaban el resultado de $1/(10)^{1/2}$=1/3,16228; y para obtenerlo hacía falta una cuenta que, como ya fue dicho arriba, y creo que en eso estamos de acuerdo, es una cuenta no muy fácil de hacer, sobre todo, sin calculadora.

HOÜEL Y LA RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES: FACILITANDO LO DIFÍCIL

Es justamente para simplificar este tipo de operaciones que alguien, a quien desconozco, pero a quien muchos de nosotros deberíamos estar sumamente agradecidos, inventó la racionalización de denominadores. Operación que, como su nombre lo indica, nos evita la difícil tarea de tener que dividir por un número irracional, como es en este caso $(10)^{1/2}$.

Así, aplicando este asombroso método, que alguien incluyó en nuestros programas de estudio (hoy *curriculum explícito*), mediante un simple procedimiento (hoy *contendido procedimental*), logramos simplificar esta difícil división, como sigue:

Definitivamente más fácil, más simple, y más económico, ya que, con sólo incluir en las tablas las

$$(10)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3{,}16228}{10} = 0{,}316228$$

raíces cuadradas, no hizo falta incluir las divisiones por las raíces cuadradas en la edición de las tablas de Hoüel, que a la sazón ya tenía 176 páginas en su edición de "El Ateneo" de 1989 (y sólo se había ampliado 5 páginas respecto de su edición por Glem en 1942) .

En el caso de las funciones trigonométricas cosecante, secante y cotangente, la situación es aproximadamente la misma, la tabla traía (y trae, pero creo que ya casi nadie la usa), por ejemplo tg 30° =0,57735; pero calcular la cotangente del mismo ángulo implicaba hacer la inversa de esa tangente,

$$\operatorname{cotg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{1}{0{,}57735}$$

que nuevamente implicaba dividir por un número "irracional", y por lo tanto, el valor ya aparecía ya calculado en las tablas cotg 30° = 1,73205.

Aunque, debo admitir que, siendo el ángulo de 30° que corresponde a las excepciones en la dificultad, mencionadas arriba, en este caso el problema también podemos, y podíamos llevarlo a un problema de racionalización de denominadores, con lo que podemos hacer al alumno ejercitar ambos temas simultáneamente. Sabiendo que:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

obtenemos fácilmente:

$$\text{cotg}30° = \frac{\cos 30°}{\text{sen}30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}73205$$

y

$$\text{tg}30° = \frac{\text{sen}30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1{,}73205}{3} = 0{,}57735$$

Cabe aclarar que, en ambos casos, el valor de $(3)^{1/2}$ nos lo proveía el amigo Hoüel en sus tablas.

LLEGÓ LA CALCULADORA: HORA DE SIMPLIFICAR LO COMPLEJO

A partir de la década del ´80 la calculadora pasó a ocupar el lugar que ocupaba la tabla de Hoüel para obtener los valores de los números irracionales, así, tanto el valor de $(3)^{1/2}$como el de $(3)^{1/2}$ se obtienen, en el mundo real (laboral, doméstico, científico o tecnológico) utilizando una calculadora, o, llegado el caso, una computadora, pero ya nunca, utilizando aquellas tablas de Hoüel que de tantos problemas nos sacaron otrora.

Pero, lo más interesante es que la división de un entero por un número irracional se hace con la calculadora con la misma facilidad que se hace la división de un número irracional por un entero, es decir, las operaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}316228$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = 0{,}316228$$

Requieren el mismo esfuerzo, con la salvedad de que la segunda requiere digitar un cero más en la segunda que en la primera, y siendo que llevan el mismo esfuerzo (con la salvedad indicada), ¿para qué obligar a alguien a racionalizar el denominador antes de usar la calculadora?

Sin duda la secuencia de acciones para obtener el valor buscado

1) Apriete el botón $\boxed{1}$

2) Apriete el botón $\boxed{/}$

3) Apriete los botones $\boxed{1}$ $\boxed{0}$

4) Apriete el botón $\boxed{\sqrt{x}}$

5) Apriete el botón $\boxed{=}$

Es más eficiente (y, porque no decirlo, más racional) que la secuencia

1) Verifique si en la expresión hay un denominador que incluya una raíz cuadrada que de origen a un número irracional, en nuestro caso $(10)^{1/2}$
2) Multiplique y divida la expresión por esa raíz cuadrada, y así elimine la raíz del denominador (pero obténgala en el numerador).

Luego tome la calculadora y:

3) Apriete los botones $\boxed{1}$ $\boxed{0}$

4) Apriete el botón $\boxed{\sqrt{x}}$

5) Apriete el botón $\boxed{/}$

6) Apriete los botones $\boxed{1}$ $\boxed{0}$

7) Apriete el botón $\boxed{=}$

TABLAS DE HOÜEL, RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES Y COFUNCIONES: ARGUMENTOS A FAVOR Y EN CONTRA

Tengo que admitir que lo que aquí expongo ya lo he expresado anteriormente ante los asistentes a diferentes cursos sobre didáctica, evaluación o curriculum en los que me ha tocado participar en distintos roles, y he encontrado algunas objeciones a mis planteos.

Como bien dice Ana Bressan (2006) "lo básico de ayer no es lo básico de hoy...no podemos volver para atrás...", y esto es así porque, las necesidades a las que responde la educación cambian, y porque la tecnología, indisolublemente asociada a la aplicación del conocimiento, también cambia.
"No evitemos enseñar en nuestras clases (¡ni en las de los institutos de formación docente!) la matemática que nos reclama la realidad social, científica y tecnológica" sigue Ana (Bressan, 2006), y yo agregaría: evitemos enseñar aquellas cosas que la realidad social, científica y tecnológica ya han dejado de lado.

Y esto no es arbitrario, nuestros programas de estudio tienden a incluir cada vez más contenidos por su actualidad y aplicabilidad, de los que excluyen por su obsolescencia e inaplicabilidad.

Es por eso que invito al lector a que haga un ejercicio de argumentar a favor y en contra (al estilo de los sofistas) de algún contenido cuya inclusión en el curriculum de su nivel le parezca cuanto menos "cuestionable", y a partir de su propio ejercicio de acusación y defensa tome una posición respecto de si este contenido debe conservarse o ser excluido.

Así, a modo de ejercicio, en este trabajo se tomaron las tablas de Hoüel, la racionalización de denominadores y las cofunciones trigonométricas, que no son los únicos, y quizás tampoco los más importantes para cuestionar críticamente como contenido curricular.

Me permito un desliz mientras escribo este trabajo, el procesador de texto se empeña en marcarme un error al usar la palabra "cofunciones" y me propone reemplazarla por "confusiones", me vi tentado de aceptar la opción "Agregar" que me ofrecía el revisor ortográfico y gramatical, pero pensándolo bien él no está tan equivocado.

Ahora sí, continuando, en la tabla que sigue se encuentran algunos argumentos y las correspondientes respuestas, algunos de los cuales corresponden a discusiones verdaderas con otros docentes y otros, debo admitirlo, son inventados por mí, aunque no tan descabellados.

	10 Argumentos a favor	10 Argumentos en contra o respuestas
1	Las tablas marcaron un hito histórico en la resolución de problemas matemáticos que incluyen funciones trigonométricas, raíces y logaritmos, no deberíamos olvidarlas.	Concuerdo, entonces, mostrémoslas en clase, y que los alumnos aprecien lo buenas que fueron en su momento, y la suerte de que hayan sido superadas.
2	Las tablas de Hoüel están impresas en papel, que es reciclable, y a su vez se fabrica utilizando madera (árboles) que son un recurso natural renovable.	La tabla de Hoüell no contamina, es verdad, pero cuantos árboles hay que matar para hacer cada edición de 1500 ejemplares.
3	Aprender a Utilizar las tablas de Hoüel, las cofunciones, o a racionalizar denomiadores no hace daño.	No, daño no hace, pero aprender esos contenidos quita tiempo para aprender otros más actuales o más útiles.
4	Las calculadoras utilizan pilas, o células de silicio, energía eléctrica de la red, que se produce en gran parte en centrales nucleares, fuentes de energía que dan origen residuos contaminantes de difícil tratamiento.	Entonces, trabajemos para utilizar fuentes de energía renovables, y evitemos las fuentes que contaminan, pero eso no significa estar contra las calculadoras.
5	Si no tuviéramos calculadora, o computadora, o no tuviéramos energía para alimentarlas podríamos aún utilizar las tablas de Hoüel.	Lo mas probable es que si no tuviéramos energía, tampoco tengamos a mano las tablas de Hoüel, y si las tenemos, nuestra preocupación será más por la falta de energía que por las raíces, los logaritmos y las cofunciones.
6	La racionalización de denominadores es un procedimiento que favorece el pensamiento abstracto.	La abstracción de pensamiento que se favorece, no es mayor que la de saber que el producto de raíces cuadradas de igual base, da por resultado la base.
7	La racionalización de denominadores y las cofunciones trigonométricas permiten simplificar fórmulas y ecuaciones.	Falso, la complejidad de una fórmula, hoy, no está en que exista un número irracional en el denominador.
8	Las cofunciones trigonométricas permiten resolver más simplemente algunos problemas que las funciones.	Falso, las funciones trigonométricas no son más que las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria, y para resolver cualquier otro triángulo alcanza con sen, cos y tag.
9	Los programas del nivel superior Universitario y no Universitario incluyen racionalización de denominadores y cofunciones, la educación media debe, por lo tanto, enseñarlos.	Verdad que en muchos casos los incluyen, acaso no deberían mejor, tanto la educación media, como la superior, eliminarlos como contenido?

10	Yo aprendí así, por lo tanto, los alumnos también pueden aprender así.	Verdad, los alumnos, o al menos algunos de ellos, pueden hacerlo, la pregunta es si en realidad deben aprender así.

A MODO DE CONCLUSIÓN: HAY MUCHO QUE ENSEÑAR

El presente trabajo pretende contribuir a la selección de contenidos para la educación matemática, pero no para la inclusión de nuevos contenidos, sino para la exclusión de algunos que, aunque obsoletos, se siguen enseñando.

Se hace necesario revisar lo que se enseña, discriminar lo actual de lo obsoleto, lo importante de lo anecdótico, lo sustancial de lo ritual, para:

> *"contribuir así a que las instituciones educativas realicen con acierto las diferentes clases de trabajo que pueden hacer realmente mejor: promover maneras mas eficientes y adecuadas de seleccionar, organizar y presentar grupos de conocimiento verdaderamente importantes a los estudiantes, de modo que estos últimos puedan aprenderlos y retenerlos significativamente durante largos períodos - como fines en sí mismo, como bases para futuros aprendizajes, para la resolución de problemas y en algunos casos, para la creatividad."*

(Ausubel, D., Novak, J. y H. Hanesian, 1991: p 447)

Este trabajo pretende ser una mínima contribución en ese sentido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anchorena, S. (1995). *Los contenidos para la Enseñanza de la Física en el siglo XX. ¿Ciencia sin Conciencia? E*n la colección Curriculum Presente, Ciencia Moderna Ausente, FLACSO, disponible en edición electrónica en www.flacso.org.ar.
Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1991). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
Bressan, A. (2006). *Lo básico de ayer no es lo básico de hoy..* En Novedades Educativas N° 182.
Colegio Nacional Buenos Aires. (2005). Programa de Matemática (Cuarto año), Buenos Aires.
Hoüel, J. (1947). Tabla de logaritmos con Cinco Decimales. (10ª ed.). Glem, Buenos Aires.
Hoüel, J. (1989). Tablas de Logaritmos a Cinco Decimales. (19 a ed.). Buenos Aires: El Ateneo.